Opakování: TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL – klíčový pojem

Lineární forma $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je T.D. fce $f: G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ v bodě a $\left(L = df(a) \right)$, pokud

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 .$$

$$\iff f(a+h) - \Big(\underbrace{f(a) + L(h)}_{\text{tečná nadr.}} \Big) = o(\|h\|), \ h \to 0$$

$$\iff f(a+h) - f(a) - L(h) = \eta(h), \quad \text{kde}$$

„chybová funkce" η splňuje: $\eta(h) = o(\|h\|), h \to 0$

$$\iff \underbrace{f(a+h) - f(a)}_{} = \underbrace{L(h) + \eta(h)}_{}, \quad \text{kde} \ldots$$

Přírustek f s krokem h je roven $L(h)$ „až na malou chybu"

Říkáme, že f je v a diferencovatelná.

Víme: Obecně platí pouze implikace $(D) \Rightarrow (C)$, $(C) \Rightarrow (A)$, $(C) \Rightarrow (B)$

(D) $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ spoj. v a, $i = 1, \ldots, d$.

(C) existuje $df(a)$ (tj. f je diferencovatelná v a).

(B) existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \ldots, d$. (ne nutně spoj.)

(A) f je spoj. v a.

Definice 24: (Derivace podle vektoru & ve směru vektoru)

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$.

Definujeme derivaci funkce f v bodě a podle v:

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

Derivace f ve směru vektoru $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ je $\frac{1}{\|v\|} D_v f(a)$.

Poznámka 25: • $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a)$ (cv.)

• homogenita derivace podle vektoru: $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$D_{\lambda v} f(a) = \lambda \cdot D_v f(a)$$

$$\left[\ L.S. = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(a + \boxed{t \cdot \lambda} v) - f(a)}{\boxed{\lambda t}} \overset{\text{VOLSF}}{=} P.S.\ \right]$$

Pozn.

homogenita: $L(\alpha \cdot x) = \alpha L(x)$

p-homogenita: $L(\alpha \cdot x) = \alpha^p L(x)$.

Věta 26: (Výpočet derivace podle vektoru)
nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ T.D.
Pak platí pro $v = (v_1, \dots, v_d)$:

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{d} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} \cdot v_i \overset{\text{V16}}{=} \boxed{df(a)}(v)$$

Důkaz: Označme $L = df(a)$.

Pokud $v = 0$, $D_v f(a) = 0$ z def.

nechť $v \neq 0$.

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - L(t \cdot v) + L(t \cdot v)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{f(a+\boxed{tv}) - f(a) - L(\boxed{t \cdot v})}{\|\boxed{t \cdot v}\|}}_{\to 0 \text{ z def. T.D.}} \cdot \overbrace{\frac{\|t \cdot v\|}{t}}^{\text{omezená: } \frac{|t| \cdot \|v\|}{t} = \frac{|t|}{t} \cdot \|v\|} + \lim_{t \to 0} \frac{L(t \cdot v)}{t}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{„nulová · omezená"}} + \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t} \cdot L(v)}{\cancel{t}} = L(v) = df(a)(v)$$

∎

Definice 27: (gradient funkce)

nechť f je diferencovatelná v bodě a.

Pak definujeme gradient f v a jako:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a)\right)^T \in \mathbb{R}^d$$

Značení: Pro $v = (v_1, \dots, v_d)$, $u = (u_1, \dots, u_d)$

značíme $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$ (skal. součin)

Důsledek 28:

(i) $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$, $h \in \mathbb{R}^d$

(ii) $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, $v \in \mathbb{R}^d$

Příklad: nechť f je taková, že

$$\nabla f(-1,-1,-1) = (2,3,5)$$

Uvažujme $u = (7,5,-2)$, $v = (-3,2,0)$ $\qquad D_u f(-1,-1,-1) = ?$, $D_v = ?$

- $D_u f(-1,-1,-1) = \langle \nabla f(-1,-1,-1), u \rangle =$

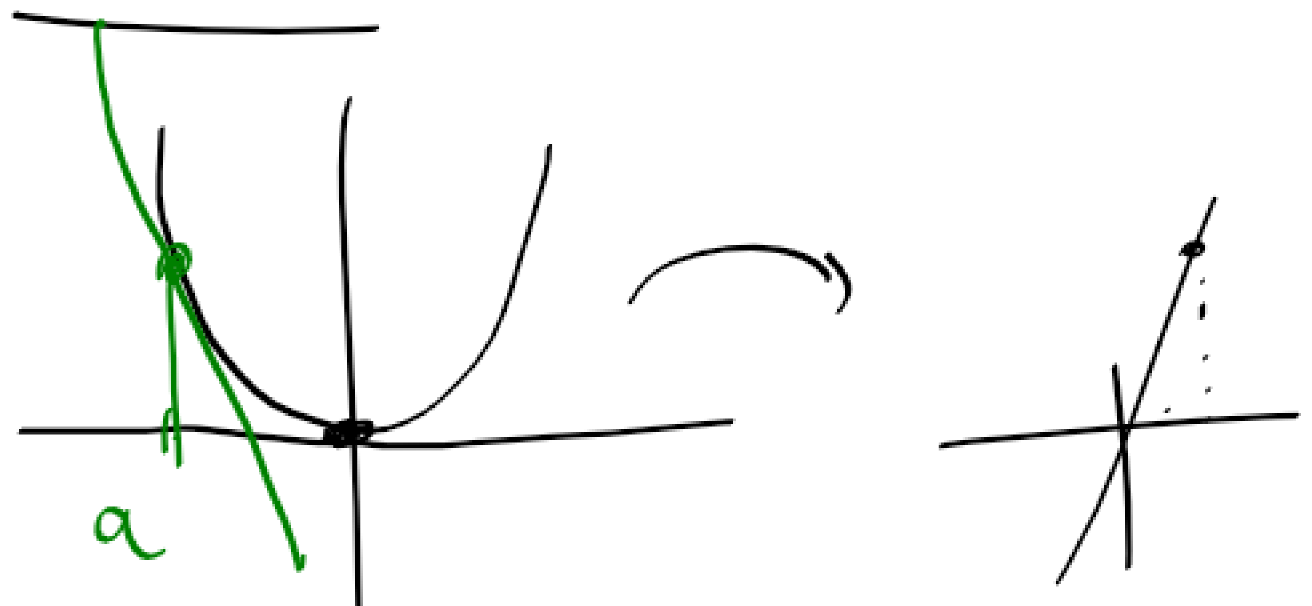
  $= \langle (2,3,5), (7,5,-2) \rangle =$

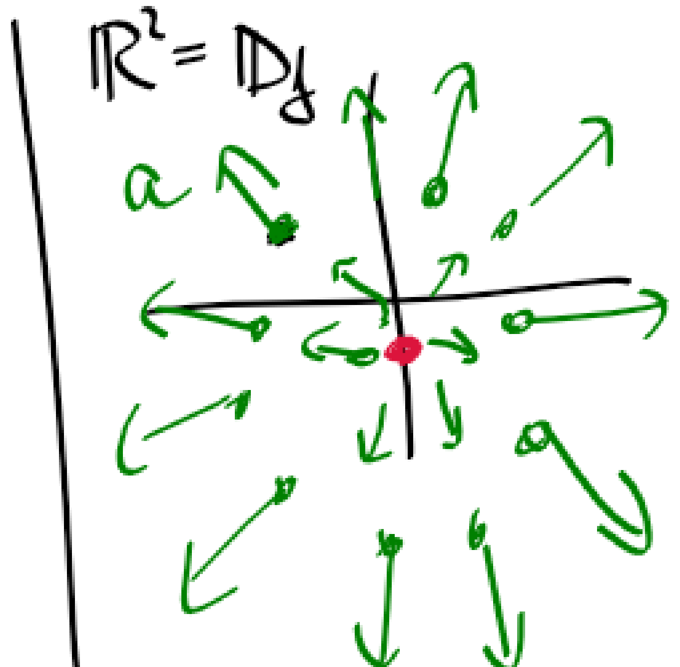
  $= 2\cdot 7 + 3\cdot 5 - 5\cdot 2 = 19$

- $D_v f(-1,-1,-1) =$

  $= \langle (2,3,5), (-3,2,0) \rangle =$

  $= 2\cdot(-3) + 3\cdot 2 + 5\cdot 0 = -6 + 6 = 0$





Věta 29: (Směr max. růstu je právě gradient)

Nechť f je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}^d$.

(i) $\max\{D_v f(a) : \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|$

(ii) Pokud $\nabla f(a) \neq 0$, pak tohoto maxima se nabývá právě ve směru $\nabla f(a)$.

Důkaz: $\nabla f(a) = 0$ ... triv. Nechť $\nabla f(a) \neq 0$.

Nechť $v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\| = 1$.

Cauchyova nerovnost

$$|D_v f(a)| = |\langle \nabla f(a), v \rangle| \le \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(a)\|,$$

přičemž rovnost nastává $\Longleftrightarrow$ vektory jsou kolineární. To jsme chtěli. ⊠

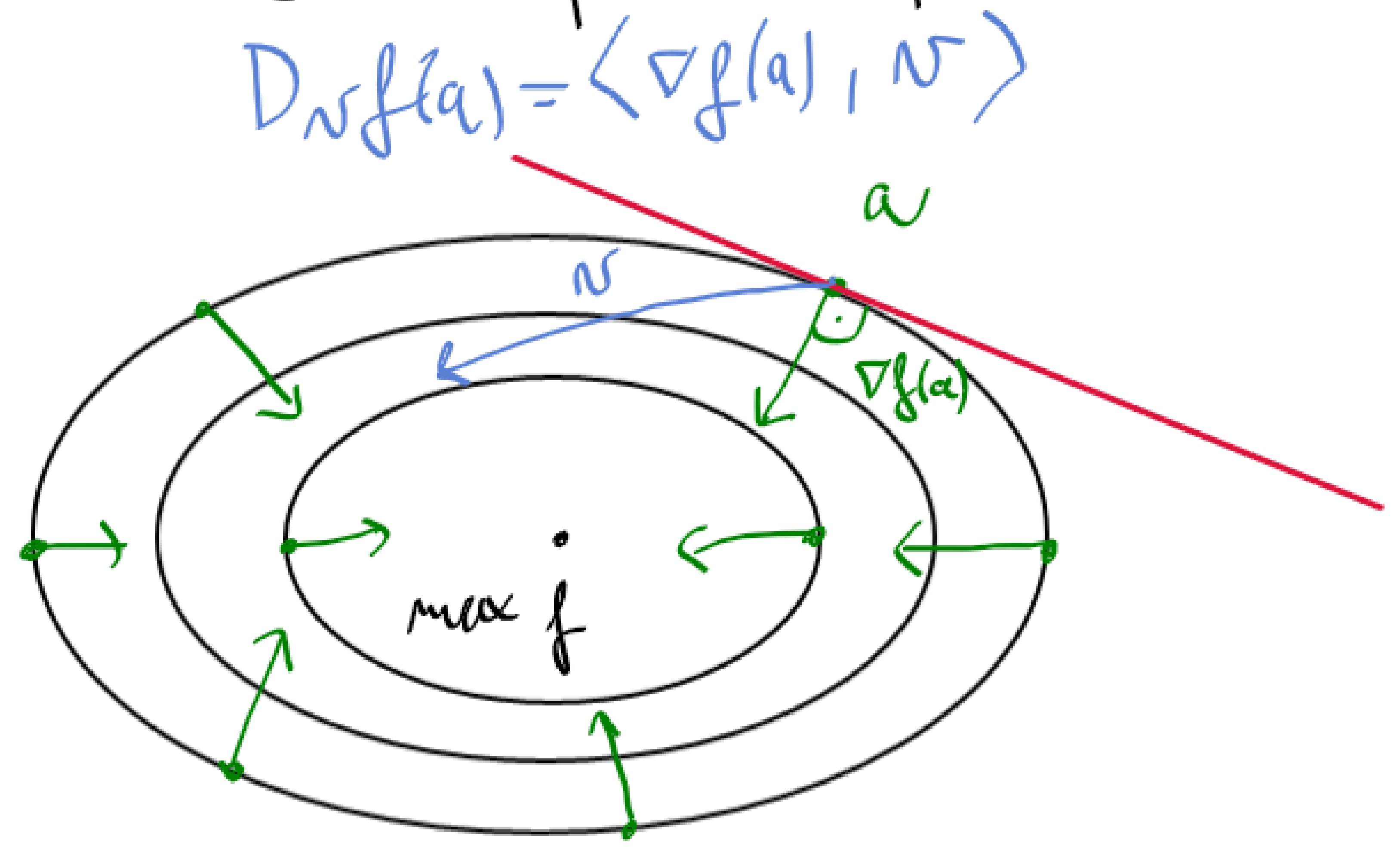
nebo: $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$,

kde α je úhel mezi u, v.

maxima se nabývá právě pro $\alpha = 0$.

funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

vrstevnice



Věta 30: (Řetízkové pravidlo)

nechť $d, k \in \mathbb{N}$ (počty proměnných).

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ (resp. $D_f \subseteq \mathbb{R}^d$)

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nechť mají spojité všechny P.D. 1. řádu.

Pak i $F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x))$

$(x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k)$ má spojité 1. P.D.

a platí pro $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_d(a)) \in \mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^k$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\overbrace{b}^{\varphi(a)}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a). \qquad j = 1, \dots, k.$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_1}(\underbrace{\varphi(a)}_{b}) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2}(\underbrace{\varphi(a)}_{b}) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_d}(\varphi(a)) \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_j}$$

$\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$

$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^k$

$b = \varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_d(a)) \in \mathbb{R}^d$

Poznámka:

$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ $\qquad F \circ G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

$G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$

Pak diferenciály $dF(b): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$dG(a): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$

$$d(F \circ G)(a) = dF(\overbrace{G(a)}^{b \in \mathbb{R}^d}) \circ dG(a)$$

$$[d(F \circ G)(a)] = [dF(b)] \cdot [dG(a)]$$